

제 3 교 시

2021학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

나 형

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 먼저 **문제지**의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- **답안지**의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

한글

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1

② 2

③ 4

④ 8

⑤ 16

2. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 일 때, $P(B)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{8}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{3}{4}$

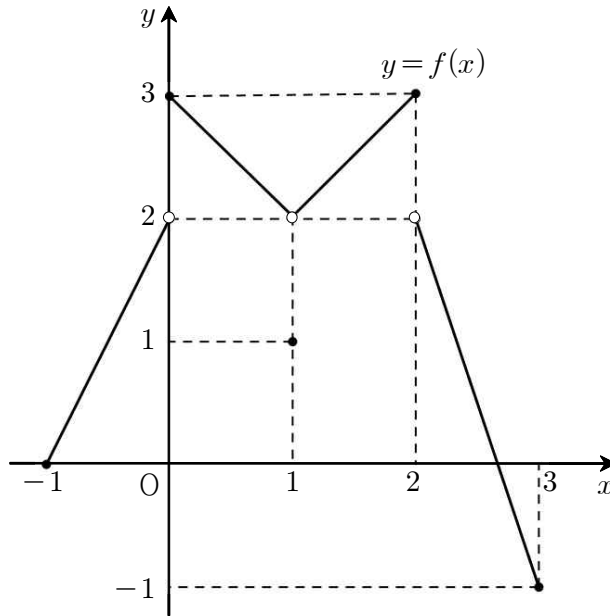
3. $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{\cos \theta}{\tan \theta}$ 의 값은? [2점]

- ① -4 ② $-\frac{11}{3}$ ③ $-\frac{10}{3}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{8}{3}$

4. 함수 $f(x) = (x^3 - 2x + 3)(ax + 3)$ 에 대하여 $f'(1) = 15$ 일 때, a 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

5. 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

6. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [3점]

① 80

② 85

③ 90

④ 95

⑤ 100

7. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 + ax - 3$$

을 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 10

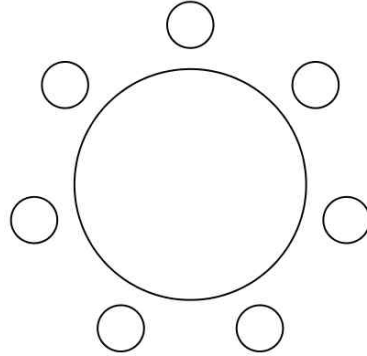
② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

8. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168

9. 곡선 $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ 에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

10. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① 4π

② 6π

③ 8π

④ 10π

⑤ 12π

11. 어느 사관생도가 1회의 사격을 하여 표적에 명중시킬 확률이 $\frac{4}{5}$ 이다. 이 사관생도가 20회의

사격을 할 때, 표적에 명중시키는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V\left(\frac{1}{4}X+1\right)$ 의 값은?

(단, 이 사관생도가 매회 사격을 하는 시행은 독립시행이다.) [3점]

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ 1

12. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2t + 3, \quad v_2(t) = at(6 - t)$$

이다. 시각 $t=3$ 에서 두 점 P, Q가 만날 때, a 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

13. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = \frac{3}{2}$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} + a_{2n} = 2a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$ 의 값은? [3점]

① 22

② 24

③ 26

④ 28

⑤ 30

14. 어느 방위산업체에서 생산하는 방독면 1개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 50인 정규분포를 따른다고 한다. 이 방위산업체에서 생산하는 방독면 중에서 n 개를 임의추출하여 얻은 방독면 무게의 표본평균이 1740이었다. 이 결과를 이용하여 이 방위산업체에서 생산하는 방독면 1개의 무게의 평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1720.4 \leq m \leq a$ 이다. $n+a$ 의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 1772.6 ② 1776.6 ③ 1780.6 ④ 1784.6 ⑤ 1788.6

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1)=2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은? [4점]

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

16. 두 실수 a, b 와 수열 $\{c_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$ 개의 수

$$a, \log_2 c_1, \log_2 c_2, \log_2 c_3, \dots, \log_2 c_m, b$$

가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제 m 항까지의 항을 모두 곱한 값은 32 이다.

$a+b=1$ 일 때, 자연수 m 의 값은? [4점]

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

17. 확률변수 X 는 정규분포 $N(10, 5^2)$ 을 따르고, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따른다. 두 확률변수 X, Y 의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자. $P(Y \leq 2k)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \neq 10$) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n} \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $= \frac{2^1 P_1}{2^1} = 1$ 이고, (우변) $= \boxed{\text{(가)}}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2^k P_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} + \frac{2^{m+2} P_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} + \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1} \times (m+1)!} \\ &\leq \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1} \times (m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

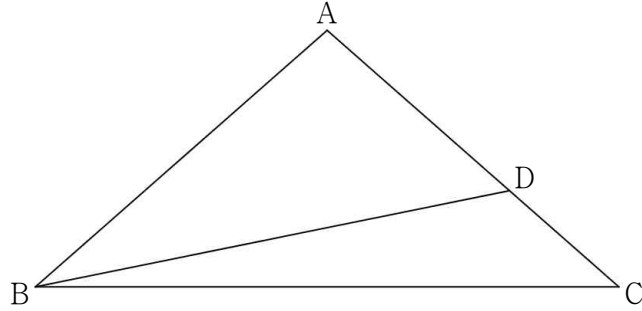
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $p + \frac{f(2)}{g(4)}$ 의 값은? [4점]

19. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 선분 AC 를 $5:3$ 으로 내분하는 점을 D 라 하자. $2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$ 일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{3}{5}$

② $\frac{7}{11}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{9}{13}$

⑤ $\frac{5}{7}$

20. 0 이 아닌 실수 k 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = 3(x-k)(x-2k)$$

이다. 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4) \\ \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1 < x < 4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위가 $\alpha \leq k < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은?

[4점]

① $\frac{3}{8}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{8}$

21. 두 곡선 $y = |2^x - 4|$, $y = \log_2 x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

㉠. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

㉡. $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

㉢. $2^{x_1} + 2^{x_2} > 8 + \log_2(\log_3 6)$

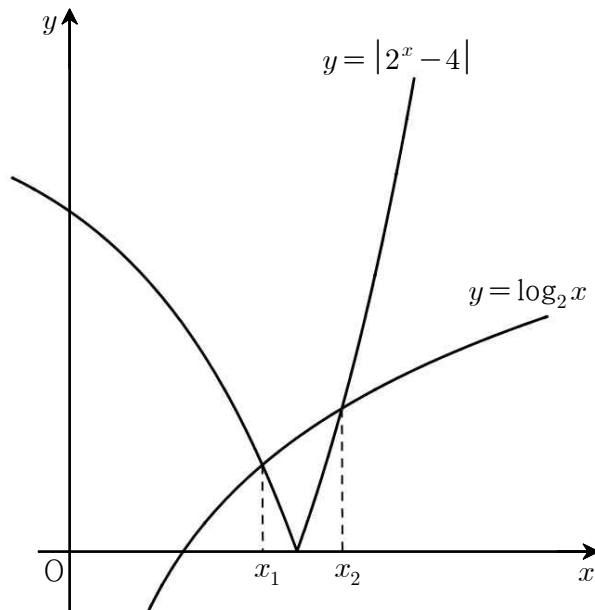
① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢



22. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 22x} - x)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$ 의 주기를 p , 최댓값을 M 이라 할 때, $p+M$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 부등식 $2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) > 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수를 구하시오. [3점]

25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. ab 가 6의 배수일 때,
 a 또는 b 가 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점]

26. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & (x \leq a) \\ \frac{x^2 + ax + 4a}{x - a} & (x > a) \end{cases}$$

가 $x = a$ 에서 연속일 때, $f(2a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

[4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$

(나) ab 는 홀수이다.

28. 양수 a 와 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + cn \quad (c \text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$ 이라 하자. $b_{20} = 199$ 가 되도록 하는 모든 c 의 값의 합을 구하시오.

[4점]

30. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 & (x < 0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+t$ 의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 2이다.

$f'(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

한글